Exercices corrigés

Exercice I

On considère le modèle $yt = a\, xi + b + \varepsilon\iota$ où $i=1, \ldots N$. L'estimateur de a par la méthode des MCO est donné par $\hat{a} = \frac{\sum(xi-\bar{x})(yi-\bar{y})}{\sum(xi-\bar{x})^2}$

1. Quel est l'incident sur â si toutes les observations de la variable X sont égales, soit $xi=x^* \quad \forall\iota$?
2. Montrez que dans le modèle linéaire simple $yi= axi+b+$et, l'égalité suivante est vérifiée : $\hat{a} = a + \frac{\sum(xi-\bar{x})(\mathrm{e}i-\bar{e})}{\sum(xi-\bar{x})^2}$
3. On suppose que l'erreur du modèle est positivement corrélée avec l'explicative X. Que peut-on dire des propriétés de l'estimateur des MCO dans un tel contexte ? Démontrez vos affirmations

1) Quel est l'incident sur â si toutes les observations de la variable X sont égales, soit $xi=x^*$ $\forall\imath$?

$$\hat{a} = \frac{\sum(xi-\bar{x})(yi-\bar{y})}{\sum(xi-\bar{x})^2}$$

Toutes les observations sont égales ; xt=x* ;

$donc\ \frac{\sum x*}{n} = \bar{x}$=x* ;

$(x * - \bar{x})$=0 ;   Donc â=0.

2) Montrez que dans le modèle linéaire simple $yi = axi + b + ei$, l'égalité suivante est vérifiée : $\hat{a} = a + \frac{\sum(xi - \bar{x})(ei - \bar{e})}{\sum(xi - \bar{x})^2}$

$\hat{a} = \frac{\sum(xi-\bar{x})(yi-\bar{y})}{\sum(xi-\bar{x})^2}$; $donc\ \hat{a} = \frac{\sum(xi-\bar{x})yi - \bar{y}\ \sum(xi-\bar{x})}{\sum(xi-\bar{x})^2} = \frac{\sum(xi-\bar{x})yi}{\sum(xi-\bar{x})^2}$;

$y_i = ax_i + b + e_i$; $\bar{y} = \hat{a}\bar{x} + b + \bar{e}$

donc $(yt - \bar{y}) = ax_t + b + et\ \_\ \hat{a}\bar{x} + b + \bar{e}$ donc $\hat{a} =$

$\frac{a\sum(xi-\bar{x})xi - \hat{a}\bar{x}\ \sum(xi-\bar{x}) + \sum(xi-\bar{x})(et-\bar{e})}{\sum(xi-\bar{x})^2}$;

on a $\hat{a}\bar{x}\ \sum(xi - \bar{x}) = 0$; $\frac{a\sum(xi-\bar{x})xi}{\sum(xi-\bar{x})^2} = a$

$$donc\ \hat{a} = a + \frac{\sum(xi - \bar{x})(ei - \bar{e})}{\sum(xi - \bar{x})^2}$$

3) Que peut-on dire des propriétés de l'estimateur des MCO dans le contexte où l'erreur du modèle est positivement corrélée avec l'explicative X.? Démontrez vos affirmations

On a la relation suivante : $\hat{a} = a + \frac{\sum(xi-\bar{x})(ei-\bar{e})}{\sum(xi-\bar{x})^2}$ **; on va développer le numérateur qui devient :**

$\underline{\sum(xi-\bar{x})(ei-\bar{e})=\sum(xi-\bar{x})(ei)\ \sum(xi-\bar{x})\bar{e}}$; $\sum(xi-\bar{x})(ei-\bar{e}) = \sum(xi-\bar{x})(ei) = \sum xiei + \bar{x}\sum ei.$; $\sum(xi-\bar{x})\bar{e}=0$

Donc $\hat{a} = a + \frac{\sum xiei+\bar{x}\sum ei}{\sum(xi-\bar{x})^2}$;

$E(\hat{a}) = a + \frac{\sum E(xiei)+\bar{x}\sum E(ei)}{\sum(xi-\bar{x})^2}$ **; E (ei)=0 ; E (xiei)>0 ; corrélation positive entre l'erreur et la variable explicative (entre ei et xi).**

Donc $\hat{a} = a + \frac{\sum xiei}{\sum(xi-\bar{x})^2}$ **; on dit que â est biaisé et le biais est égale à** $\frac{\sum xiei}{\sum(xi-\bar{x})^2}$

Exercice II

Nous considèrerons la relation $y_i = ax_i + b + e_i$.

1. Montrer que $\sum e_i x_i=0$; $\sum e_i=0$; $\sum \hat{Y}_i=\sum Y_i$. Montrer que la droite de régression passe par les points moyens .$\bar{x}\bar{y}$

1. A l'aide de ces 10 observations, les quantités suivantes sont obtenues :

2. $\sum y_i=19.98$; $\sum y^2_i=53.82$; $\sum x_i=62$; $\sum x^2_i=484.23$; $\sum x_i y_i=159.35$

3. Quel est le signe attendu pour le paramètre *a* ? Justifier votre réponse.

4. Procéder à l'estimation de la relation par la méthode des moindres carrés ordinaires.

5. Ecrire â en fonction de du coefficient de corrélation r_{xy}.

1. Vérifier que $\sigma = 0,40$. Tester la signification statistique de la variable x. ($\alpha=5\%$).

$\underline{\sum eixi=0}$; $\sum$(yi-â0-â1xi)xi ; $=\sum$(yi*â0-â1xi)= $(\sum(yi-\bar{y}) - â1\sum(xi-\bar{x}))xi=(\sum(yi-\bar{y})xi - â1\sum(xi-\bar{x})xi=0$;

on divis les deux éléments par $\sum(xi-\bar{x})xi$; on aura donc $\frac{\sum(yi-\bar{y})xi}{\sum(xi-\bar{x})xi}$ - $\frac{â1\sum(xi-\bar{x})xi}{\sum(xi-\bar{x})xi}$;

donc $\frac{\sum(yi-\bar{y})xi}{\sum(xi-\bar{x})xi} - â1 = 0; car\ â1 = \frac{\sum(yi-\bar{y})xi}{\sum(xi-\bar{x})xi} = \frac{cov(xiyi)}{v(xi)}$

$\underline{\sum ei=0}$; $\sum(Yi- \hat{Y}_i) = \sum(yi- â0 - â1xi) = \sum(yi - \bar{y} + â1\bar{x} - â1xi) =$

$$\sum(yi - \bar{y} - â1(xi - \bar{x}) = \sum(yi - \bar{y}) - â1\sum(xi - \bar{x}); \sum(yi - \bar{y}) = 0\ et\ â1\sum(xi - \bar{x}) = 0$$

$\underline{\sum\hat{Y}_i=\sum Y_i} = \sum\tilde{\hat{y}}i = \sum(â0 - â1xi) = \sum(\bar{y} + â1\bar{x} - â1xi) =$

$$\sum(\bar{y} - â1(xi - \bar{x}) = n\bar{y} - â1\sum(xi - \bar{x});\ â1\sum(xi - \bar{x}) = 0;\ n\bar{y} = \sum yi;\ donc\ \sum\hat{y}_i = \sum y_i$$

<u>La droite de régression passe par les points moyens.$\overline{xy}$</u> : $\underline{\hat{Y}(\bar{x}) = â0 + â1(\bar{x}) = (\bar{y} - â(\bar{x})) + â1(\bar{x}) = \bar{y}}$

$\sum yi=19.98$; $\sum y^2i=53.82$; $\sum xi=62$; $\sum x^2i=484.23$; $\sum xiyi=159.35$; n=10 ; $\overline{y}=\frac{19,98}{10}$1,998; $\overline{x}=\frac{62}{10}$=6,2; cov(xi;yi)=$\frac{159,35}{10}$-1,998*6,2=3,55 ; v(x)=9,983 ; donc â1=0,36; v(y) = 1,39

1) Quel est le signe attendu pour le paramètre *a* ? Justifier votre réponse. Le signe de â1 est positif car il dépend du signe de la covariance. Cov(xy)=+3,55.

2) Procéder à l'estimation de la relation par la méthode des moindres carrés ordinaires. Selon la méthode des MCO;

â1=$\frac{cov(xy)}{v(x)}$ et â0=$\overline{y}$-â1$\overline{x}$ on a cov(xi;yi)=$\frac{159,35}{10}-1,998*6,2=3,55$; v(x)=9,983 ; donc â1=$\frac{3,55}{9,983}$=0,36; â0=1,998-0,36*6,2=-0,21; $\widehat{y}$i=0,6xi-0,21

3) Ecrire â en fonction du coefficient de corrélation r_{xy}

$r^2=\frac{SCReg}{SCT}$; $r^2 = \frac{â^2\sum(xi-\overline{x})^2}{\sum(yi-\overline{y})^2}$ ➔ â= r * $\frac{\sigma y}{\sigma x}$

4) Vérifier que σ =0,40. SCT=SCReg + SCRes; r^2=SCReg/SCT➔ 1-r^2=SCRes/SCT; SCRes=(1-r^2)*SCT; SCT=n*v(y)=10*1,39=13,9; r^2=cov²(xi;yi)/(v(xi)*v(yi); r^2=0,91; 1-r^2=0,09; SCRes=0,09*13,9=1,25; σ^2=(1,25/(10-2))=0,156; σ=0,4

Tester la signification statistique de la variable x. (α=5%). Test de Student : Ho: a=0; H1:a#0;

T_statistique sous Ho: t-statistique= â/σâ; ; $\sigma^2 â = \frac{\sigma^2 e}{\sum(xi\ \ \overline{x})^2}$; $\sum(xi\ \ \overline{x})^2$=n*v(x)=10*9,983=99,83; donc $\sigma^2 â = \frac{0,156}{99,83}$0,0016; $\sigma â = 0,040$;

$t - stat = \frac{0,36}{0,040}$ =8,98. T-theorique (5%;8)=2,31. donc t-calculé > t-théorique rejet de Ho; la variable x est statistiquement significative.

Exercice III

Maitriser les formules

Soit le modèle linéaire simple suivant : yi=axi+b+ei ;

Les résultats de l'estimation économétrique est $Y_i = 1{,}251\,xt - 32{,}95$;

Avec $n = 20$; $r^2 = 0{,}23$; $\hat{\sigma}e = 10{,}66$

1) En utilisant les données ci-dessus calculer les statistiques suivantes :
la somme des carrés des résidus (*SCRes*), la somme des carrés totaux (*SCT*), la somme des carrés de régression (*SCReg*), la valeur de la statistique du Fisher empirique (*F*-calculé) et l'écart type du coefficient â1(ˆσ̂â1).

2) Le coefficient de la variable *x* est-il significativement supérieur à 1 ?

1.

$\hat{\sigma}e$ = 10,66 donc $\hat{\sigma}^2 e$ =113,64 =$\frac{SCRes}{20-2}$; donc SCRes=18*113,64=2045,44. **SCRes=2045,44**

SCT=SCReg +SCRes; on divise par SCT; on aura $1 = \frac{SCReg}{SCT}+\frac{SCRes}{SCT}$; $\frac{SCReg}{SCT}$=r²; donc $\frac{SCRes}{SCT}$=1-r²

Donc $\frac{2045,44}{SCT}$=1-0,23; SCT=$\frac{2045,44}{0,77}$= 2656,42 ; **SCT= 2656,42**

SCReg=SCT-SCRes; SCReg=2656,42-2045,44=610,97; **SCReg=610,97**

F-empirique(calculée)=$\frac{\frac{SCReg}{2-1}}{\frac{SCRes}{20-2}}$ = $\frac{\frac{610,97}{1}}{\frac{2045,44}{18}}$ =5,38; **F-calculé=5,38**

$\hat{\sigma}^2_{\hat{a}}=\frac{\frac{SCRes}{n-2}}{\sum(xi-\overline{x})^2}$; on a SCReg=â²*∑(xi-$\overline{x}$)²; donc ∑(xi-$\overline{x}$)²=$\frac{SCReg}{\hat{a}^2}=\frac{610,97}{(1,251)^2}$=390,40; $\hat{\sigma}^2_{\hat{a}}=\frac{113,64}{390,40}$=0,29;

$\hat{\sigma}_{\hat{a}}$=0,54

Nous pouvons aussi utiliser la formule de t-stat=$\frac{\hat{a}}{\hat{\sigma}_{\hat{a}}}$*; t_stat=*$\sqrt{Fstat}$*; t=*$\sqrt{5,38}$*=2,32; donc*

$\hat{\sigma}_{\hat{a}}=\frac{1,251}{2,32}$*=0,54*

2.

Le coefficient de la variable *x* est-il significativement supérieur à 1 ?

Test de student.

Ho: a=1;

H1: a>1;

T_stat: $\frac{\hat{a}-a}{\hat{\sigma}_{\hat{a}}} = \frac{1,251-1}{0,54}$=0,46. théorique pour α=10%; ddl=18. test unilatéral à droite . On utilise α=10% dans une table statistique bilatérale (car α/2).

T-théorique=1,734. T-calculé < t-théorique donc on accepte Ho.

le coefficient *a* n'est pas significativement supérieur à 1.